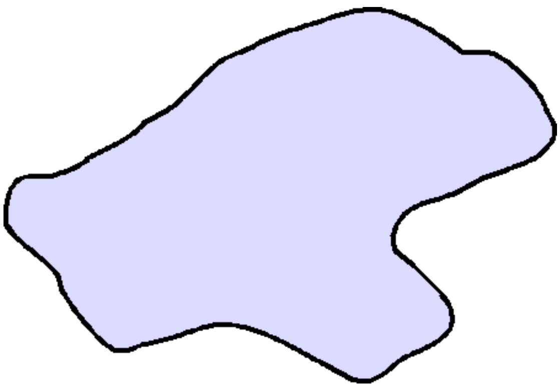
Einführung in die Integralrechnung

Inhaltsverzeichnis

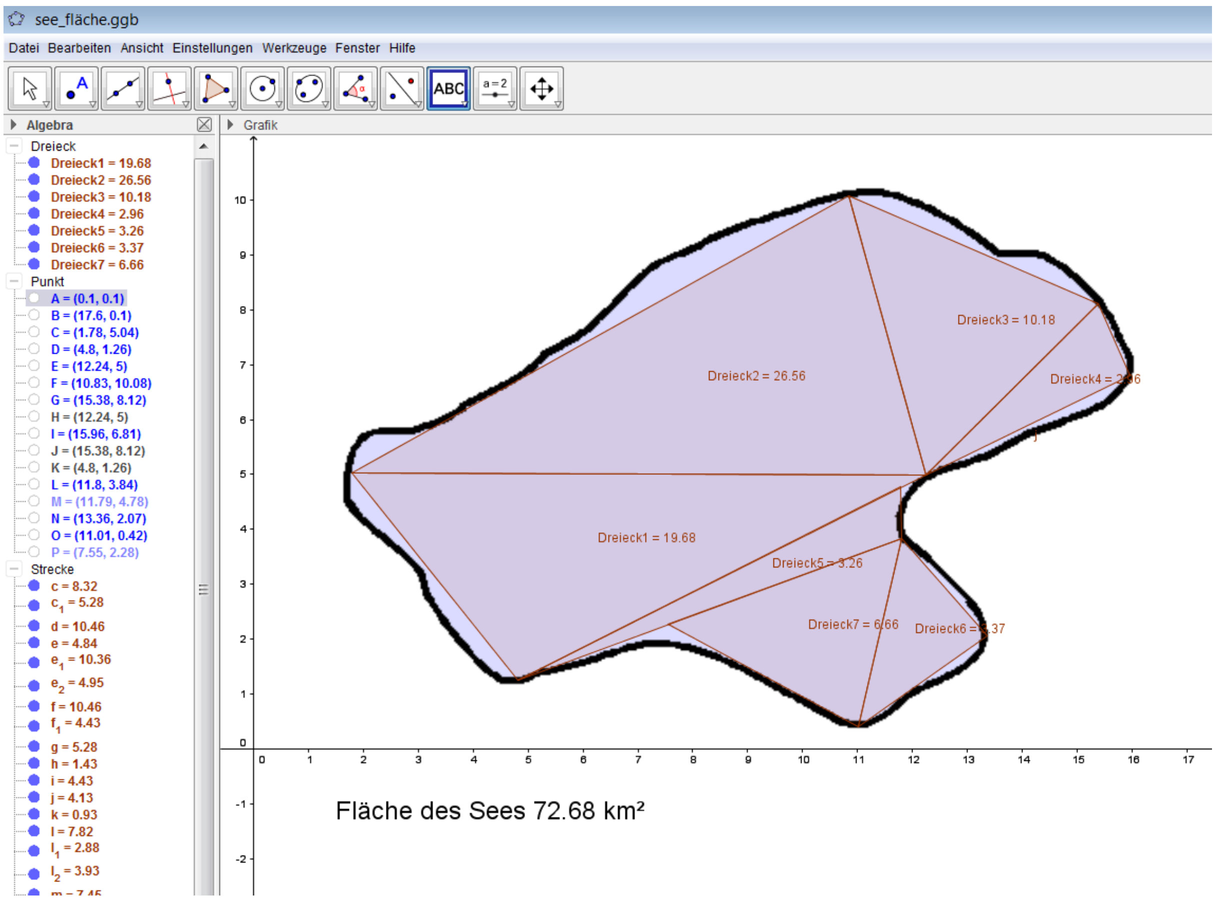
1. Das Problem der Flächenberechnung

1.1 Problemstellung

Gesucht ist der Inhalt einer krummlinig begrenzten Fläche, zum Beispiel der Flächeninhalt eines Teichs. Gegeben ist eine Zeichnung des Teichs in einem bekannten Maßstab, hier 1 : 100 000.



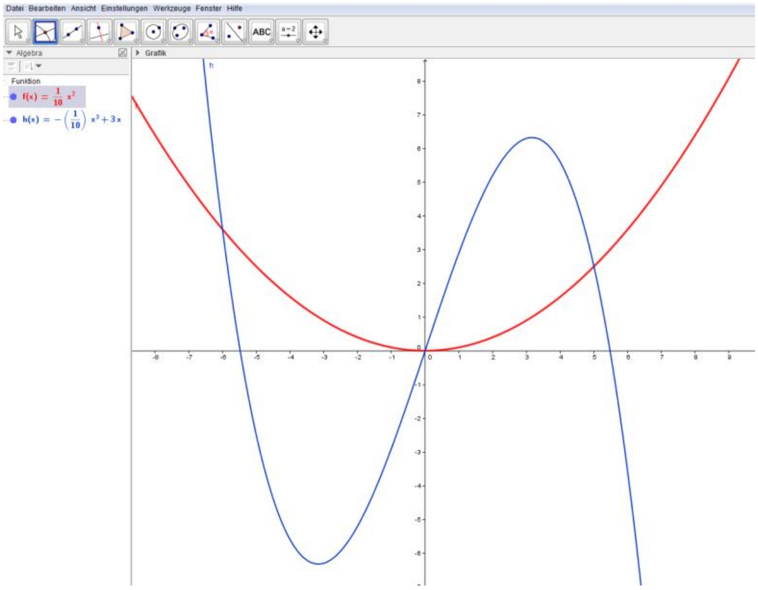
Zur Abschätzung des Flächeninhalts wird der See in bekannte berechenbare Flächenstücke aufgeteilt, so dass ein möglichst geringer Fehler entsteht. Zur Aufteilung eignen sich Dreiecke, Trapeze oder Rechtecke. Wie wählen hier Dreiecke.



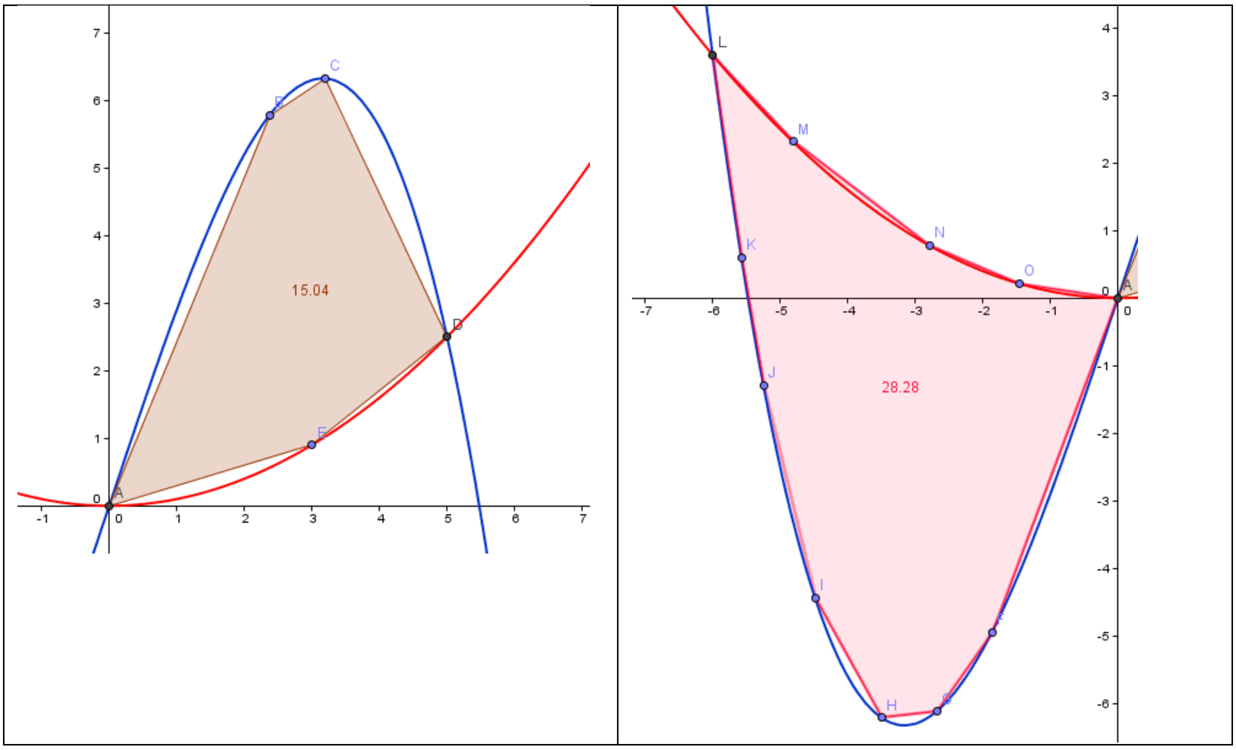
Mit Hilfe des Maßstabs kann man direkt die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke bestimmen und so die Fläche des Sees abschätzen.

1.2 Abschätzung einer Fläche mit Vielecken

Zeichen die Schaubilder der Funktionen $f(x) = \frac{1}{10}x^2$ und $f(x) = \frac{1}{10}x^3 + 3x$



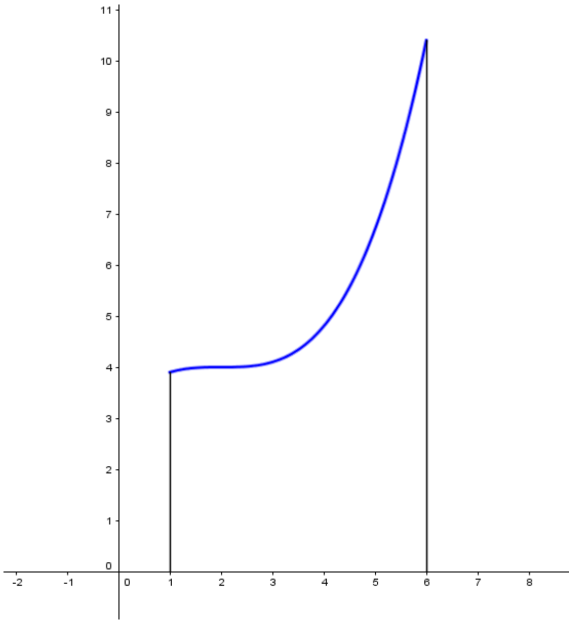
Schätze den Inhalt der beiden Flächen zwischen den Kurven ab.



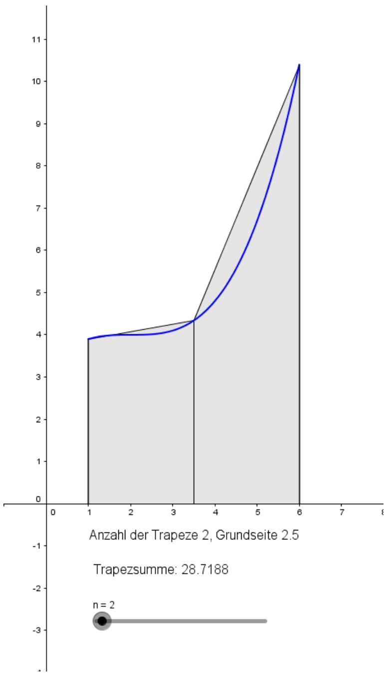
In die Flächen wurden Vielecke möglichst genau eingepasst. Die Flächeninhalte dieser Vielecke lasen sich von Hand nur Umständlich berechnen. Daher hat man historisch Flächen verwendet, deren Inhalt sich bequemer berechnen lässt.

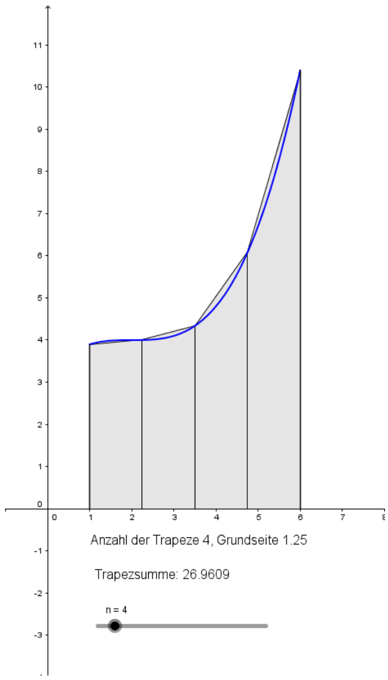
1.3 Abschätzung einer Fläche mit einfachen Flächen

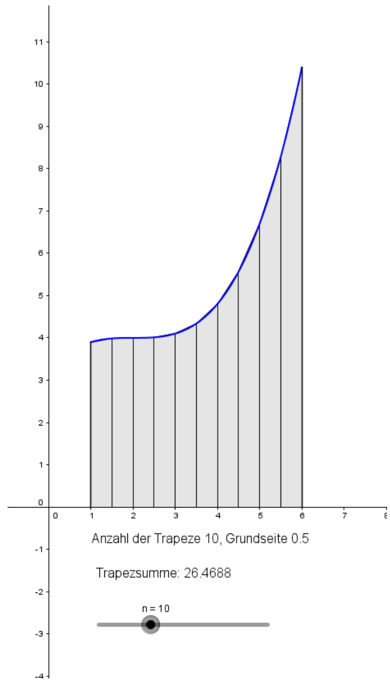
Bei der Entwicklung eines allgemeinen Verfahrens teilen wir den See so in Teilflächen auf, dass diese nur an einer Seite krummlinig begrenzt ist. Außerdem soll die „krummlinige“ Grenze das Schaubild einer bekannten Funktion y = f(x) sein.



Trapeze eignen sich gut dazu, eine solche Fläche abzuschätzen. Dazu teilt man das Intervall [1,6] in n gleiche Teile der Breite $\Delta x = \frac{6-1}{n}$ ein (allgemein beim Intervall [a,b], $\Delta x = \frac{b-a}{n}$).

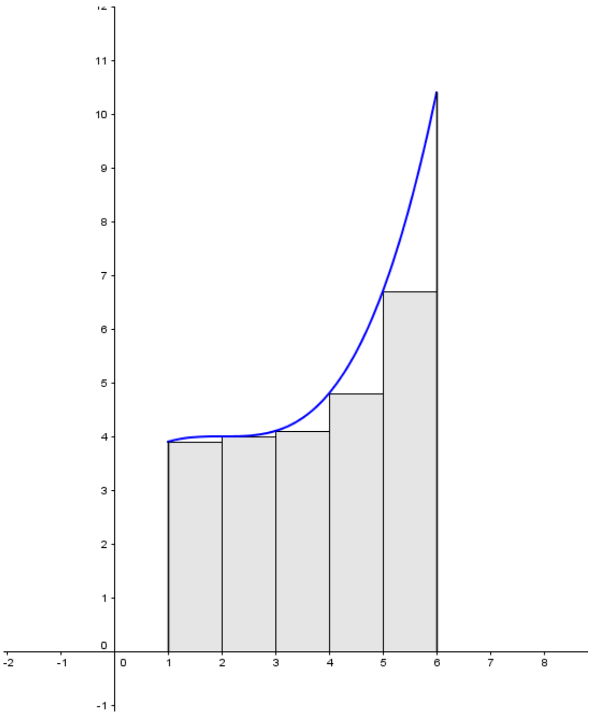




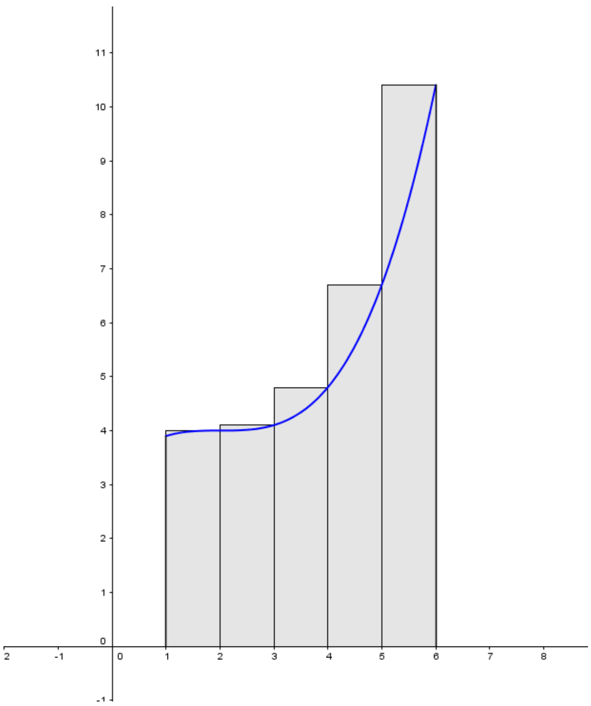


Der Flächeninhalt eines Trapezes mit der Grundseite $\Delta x = x_2 - x_1$ ist $A = \Delta x \cdot \left(\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right)$. Die Flächen aller Trapeze werden summiert. Mit Hilfe von Trapezen lässt sich zwar die gesuchte Fläche gut annähern, die Berechnung von Hand ist aber auch noch sehr aufwändig. Einfacher ist die Berechnung von Rechtecken.

Wie bei dem Verfahren mit den Trapezen teilt man das Intervall [1,6] in n gleiche Teile der Breite $\Delta x = \frac{6-1}{n}$ ein. Die Stellen an denen geteilt wird, nennt man x_0, x_1, x_2, usw. Nun kann man die Fläche unter der Kurve auf zwei Arten abschätzen. Man wählt entweder die Rechtecke so, dass alle Rechtecke unterhalb der Kurve liegen oder dass alle Rechtecke oberhalb der Kurve liegen. Die Fläche eines Rechtecks ist dann $\Delta x_i \cdot f(x_i)$.

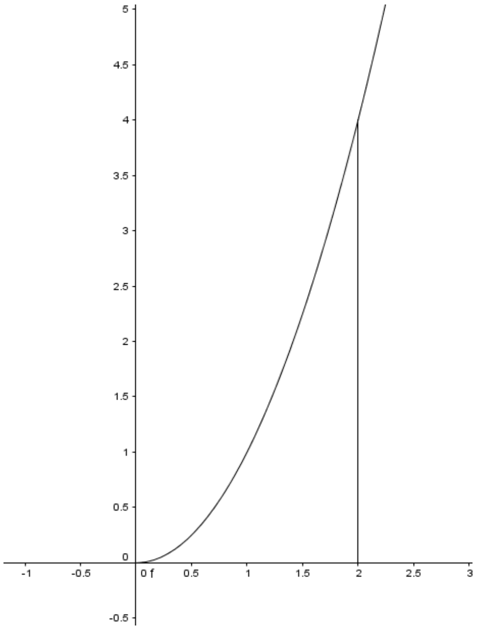


Untersumme aus Rechteckstreifen unterhalb der Kurve y=f(x).
Untere Abschätzung der gesuchten Fläche.

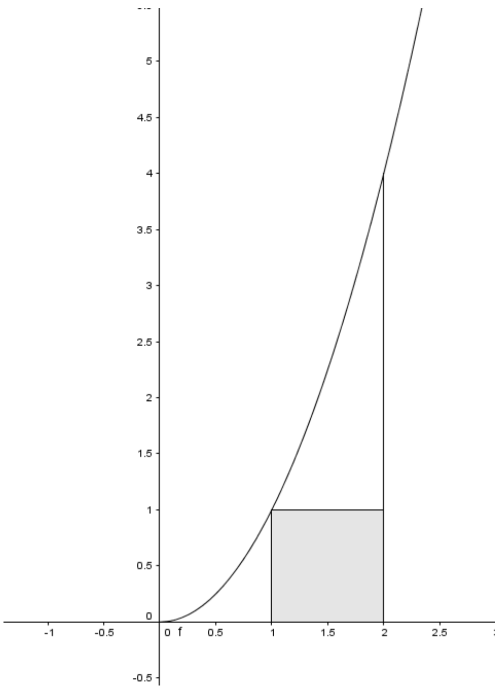


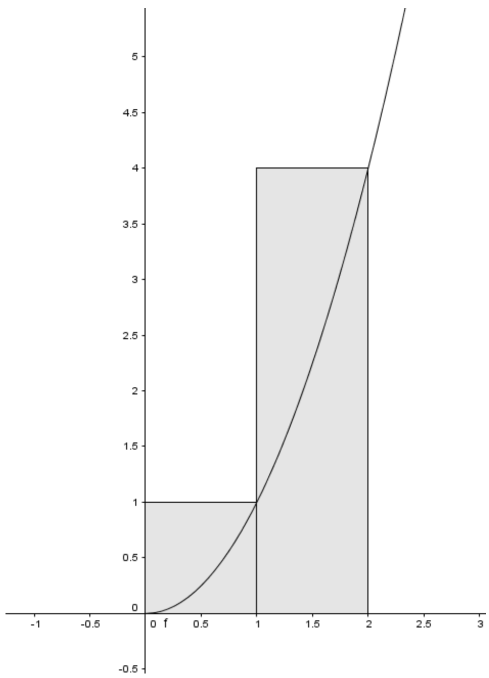
Obersumme aus Rechteckstreifen oberhalb der Kurve y=f(x).
Obere Abschätzung der gesuchten Fläche.

1.4 Fläche unter Kurve $y = f(x) = x^2$



Gesucht ist der Inhalt der Fläche, die begrenzt wird von der x-Achse, der Geraden x = 2 und der Kurve mit der Gleichung $f(x) = x^2$.



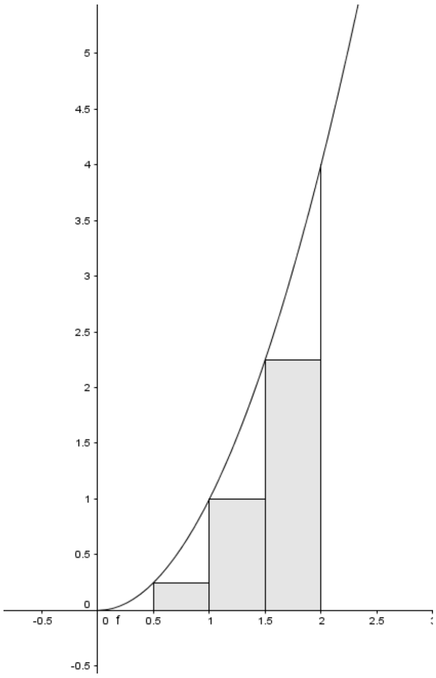


Das Intervall [0,2] wird in zwei Teile der Breite 1 eingeteilt.

Untersumme $U_2 = 1$ $U_2 = 1 \bullet f(1) = 1 \bullet 1^2 = 1$

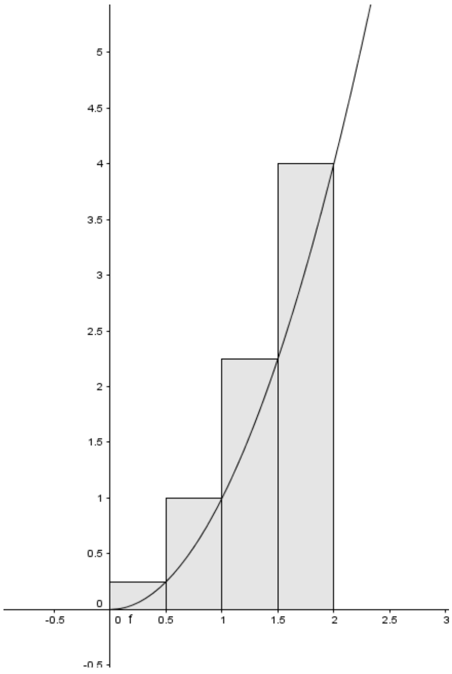
Obersumme $O_2 = 5$ $O_2 = 1 \bullet f(1) + 1 \bullet f(2) = 1 \bullet 1^2 + 1 \bullet 2^2 = 1 + 4 = 5$

Die gesuchte Fläche liegt zwischen 1 cm² und 5 cm².



$$U_4 = \frac{1}{2}f(0,5) + \frac{1}{2}f(1) + \frac{1}{2}f(1,5)$$

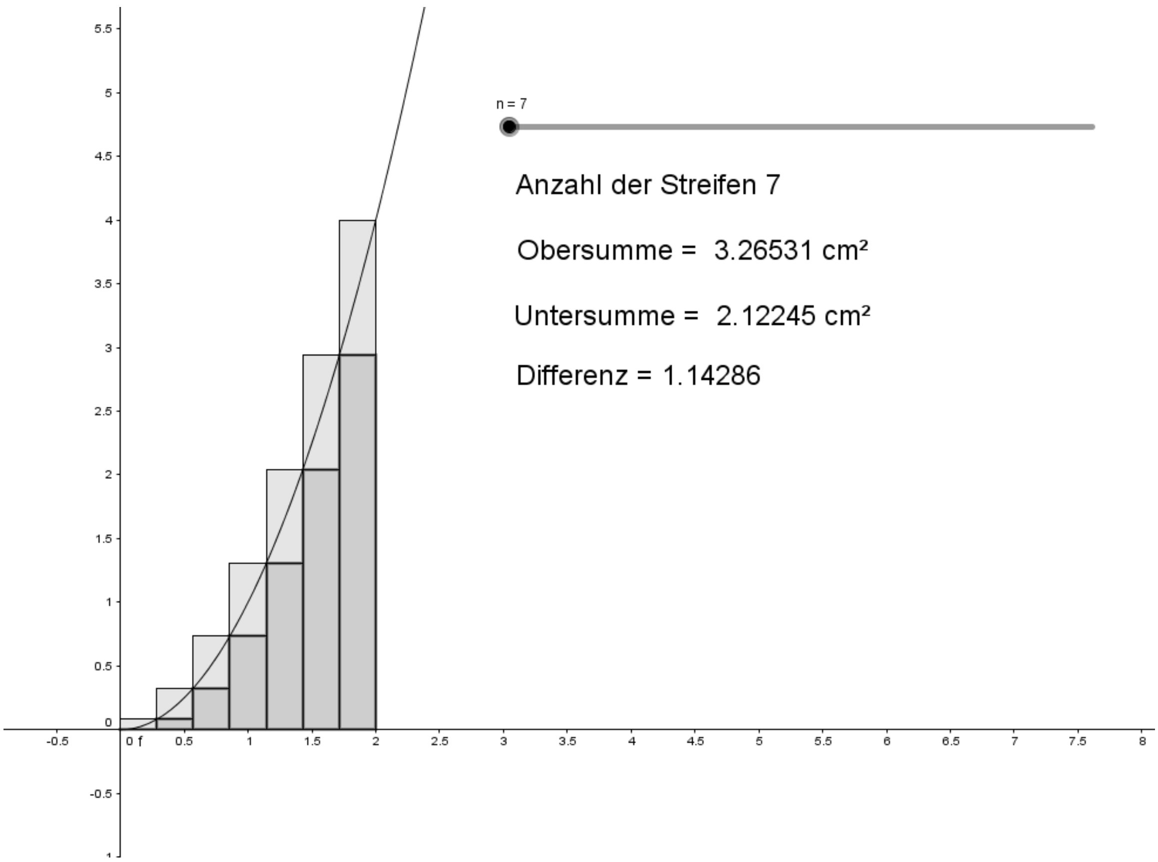
$$U_4 = \frac{1}{2}0,5^2 + \frac{1}{2}1^2 + \frac{1}{2}1,5^2 = 1,75$$



$$O_4 = \frac{1}{2}f(0,5) + \frac{1}{2}f(1) + \frac{1}{2}f(1,5) + \frac{1}{2}f(2)$$

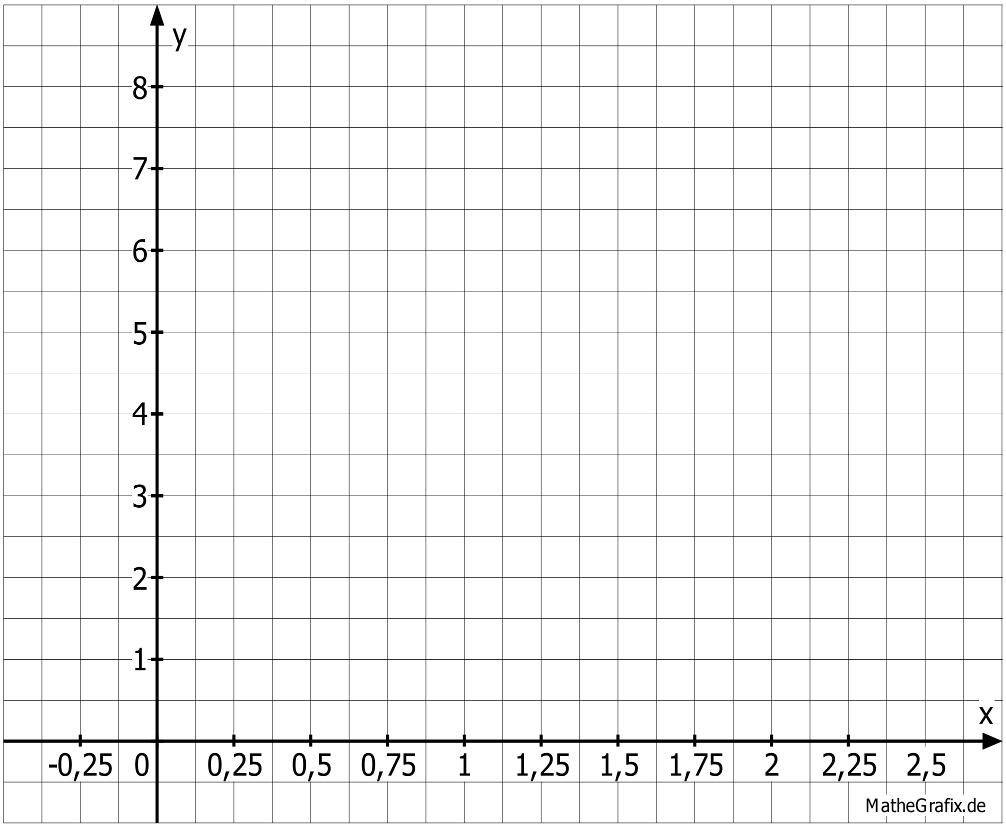
$$O_4 = \frac{1}{2}0,5^2 + \frac{1}{2}1^2 + \frac{1}{2}1,5^2 + \frac{1}{2}2^2 = 3,75$$

Die gesuchte Fläche liegt zwischen 1,75 cm² und 3,75 cm².



1.5 Arbeitsblatt

Gesucht ist der Inhalt der Fläche, die von der x-Achse, der Geraden x = 2 und der Kurve mit der Gleichung $y = x^2$ begrenzt wir.



Man wählt zur Annäherung (Approximation) Rechtecke, zunächst mit der Breite $\Delta x = 1$ und berechnet die Untersumme U_n und die Obersumme O_n. Das Intervall [0 ; 2] wird dabei in n = 2 Teile zerlegt. Nun verbessert man die Werte durch eine fortgesetzte Intervallzerlegung indem man eine Teilung in n = 4, 8, 16 Teile vornimmt und jeweils U_n und O_n berechnet. Zeichnen Sie die Rechtecke oben im Schaubild ein und berechnen Sie auf der Rückseite dieses Blattes die Rechtecksummen U_2 und O_2 sowie U_4 und O_4 und jeweils deren Differenz von Hand. Tragen Sie die Ergebnisse in die Tabelle ein. Berechnen Sie weitere Werte mit GeoGebra, tragen Sie die Ergebnisse in die Tabelle ein und beschreiben Sie Ihre Beobachtungen für U_n, O_n und O_n - U_n bei immer feinerer Teilung des Intervalls

Anzahl der Teile n	Untersumme U_n	Obersumme O_n	Differenz $O_n - U_n$
2	1	5	4
4	1,75	3,75	2
8	2,1875	3,1875	1
16	2,4219	2,9219	0,5
32	2,5430	2,7930	0,25
128	2,6355	2,6980	0,0625
512	2,6589	2,6745	0,0156
1024	2,6628	2,6706	0,0078

Beobachtung:

Bei feiner werdender Einteilung des Intervalls in gleiche Teile und damit immer größer werdender Zahl der Rechtecken nähern sich die Untersummen von unten und die Obersummen von oben immer näher der gesuchten Fläche an. Die Abweichung vom gesuchten Flächeninhalt, ausgedrückt durch die Differenz $O_n - U_n$ wird immer kleiner, sie geht gegen Null.

Vermutung: Die Obersummen O_n und die Untersummen U_n nähern sich dem gemeinsamen Grenzwert 2,6666… = $\frac{8}{3}$ an.

1.6 Zusammenfassung

Berechnung des Inhalts der Fläche, die von der Kurve y = f(x) mit f(x) ≥ 0 und den Geraden x = a und x = b (a<b) und der x-Achse begrenzt wird.

- Unterteile das Intervall [a,b] in n gleiche Teile der Breite $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.
  Die Teilungspunkte werden mit x_0, x_1, x_2, …. bezeichnet.
- Berechne die Zerlegungssumme
  $S_n = \Delta x \cdot f(x_0) + \Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \cdots$ …
- Ermittle den Grenzwert von S_n für $n \to \infty$.